

Ecuaciones Diferenciales II Examen XX

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales II Examen XX

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2026

Asignatura Ecuaciones Diferenciales II.

Curso Académico 2021/2022.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 6 de julio de 2022.

Ejercicio 1. Construye una sucesión de funciones $\{f_n\}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, que converja puntualmente a la función $f \equiv 0$ pero no lo haga de manera uniforme.

Ejercicio 2. Resuelve el problema de valores iniciales

$$x' = 1 + x^2, \quad x(0) = x_0,$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$. Determina en cada caso el intervalo maximal.

Ejercicio 3. Se considera el problema de valores iniciales

$$x'' + \sqrt{1 + x^2} = 0, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 0.$$

Demuestra que hay una única solución maximal que está definida en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Encuentra todas las funciones continuas $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen la ecuación integral

$$x(t) = (\cos t) \int_0^t x(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.

- a) Prueba la desigualdad $\sqrt{a} \leq a + 1$ para cada $a \in [0, \infty[$.
- b) Se considera una sucesión de funciones continuas $x_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, que cumplen, para cada $n = 1, 2, \dots$,

$$x_n(t) = \frac{1}{n} + \int_0^t |x_n(s)|^{1/2} ds.$$

Demuestra que la sucesión $\{x_n\}$ es uniformemente acotada y equicontinua.

Ejercicio 6. La solución del problema

$$x' = 4x(1 - x - \varepsilon y), \quad y' = 6y(2 + \varepsilon x - y), \quad x(0) = \varepsilon + 1, \quad y(0) = 2\varepsilon + 2$$

se denota por $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$.

- a) Demuestra que si $|\varepsilon|$ es lo bastante pequeño entonces esta solución está definida en $[-1, 1]$.
- b) Calcula, si existe, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon)$.
- c) Calcula, si existe, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$.